デフォルト推論における自然な拡張と帰納推論(計算アルゴリズムと計算量の基礎理論)

湯浅, 寛子

数理解析研究所講究録
666巻 1988年 135-144

デフォルト推論における自然な拡張と帰納推論

九大総理工　湯浅寛子　(Hiroko Yuasa)

1. はじめに

私たちが日常行っている推論について考察してみると，必要な情報をすべて得たうえで推論しているとは限らないようである．近年，そのような不完全な情報に基づく推論が注目され，いろいろな定式化が提案されている．Reiterのデフォルト推論(default reasoning) はその中の一つで，デフォルトという機能を用いた定式化である．Reiterは，ある世界に関する不完全な知識を，確実に真である知識の集合とある種の特別な推論規則の集合の組によって表現した．この特別な推論規則をデフォルトまたはデフォルト規則(default rule)という．そして，デフォルト規則を用いて不完全な知識を広げて，世界の記述に近づけることを考え，その広げられた知識を拡張(extension) と呼んだ．拡張は，不完全な知識に基づく推論の結果，正しいと思われる知識の集合であり，その時点での可能な世界である．確定的な知識ではなく，その世界に関する信念(belief)と捉えられるものである．したがって，新しく事実が得られると，拡張の修正を行う必要が生じる場合がある．

Reiterの動機は自然であり，デフォルト理論は，不完全な情報に基づく推論をうまく定式化している．しかし，Reiterの定義した拡張は，デフォルト規則を使用するための条件に拡張自体が使われているため，拡張を逐次的に構成することができない．そこで，本稿では逐次的構成が可能な知識の集合を定義し，Reiterの拡張との関係を論じる．この知識の集合を疑似拡張(pseudo-extension)と呼ぶが，定義に自分自身が使われていないという意味で，自然な拡張といえる．

また，拡張で説明できない新しい知識が得られると拡張を修正するという過程は未知モデルの帰納推論，つまりモデル推論に近いので，拡張の修正をShapiroのモデル推論の立場から考える．

2. Reiterのデフォルト推論

まず，Reiterのデフォルト推論 [1,2]に関する定義と定理を簡単に整理しておく．

Ｌを１階言語とする．デフォルト規則とは次のような形の規則である．

$$\frac{\alpha(x) : M\beta 1(x), \cdots, M\beta m(x)}{\omega(x)}$$

ただし，$\alpha(x)$，$\beta 1(x), \cdots, \beta m(x)$，$\omega(x)$はＬの論理式で，xは自由変数の列を表す．$\alpha(x)$を前提(prerequisite)，$\beta 1(x), \cdots, \beta m(x)$を弁明(justifications)，$\omega(x)$を帰結(consequent)と呼ぶ．Ｍは，仮定することに矛盾しないことを表す記号である．この規則は，$\beta 1(x), \cdots, \beta m(x)$と仮定することに矛盾しないならば，$\alpha(x) \rightarrow \omega(x)$と推論してよいことを意味している．ここに，$\beta i(x)$と仮定することに矛盾しないとは，$\neg\beta i(x)$であると結論するに足る情報が存在しないことをいう．また，前提$\alpha(x)$ は，空でもよい．すなわち，

$$\frac{: M\beta 1(x), \cdots, M\beta(x)}{\omega(x)}$$

もデフォルト規則で，$\beta 1(x), \cdots, \beta m(x)$と仮定することに矛盾しないならば，$\omega(x)$であると結論してよいということを意味する．

なお，$\alpha(x)$，$\beta 1(x), \cdots, \beta m(x)$，$\omega(x)$が自由変数を持たないようなデフォルト規則を閉デフォルト規則(closed default rule)と呼び，

$$\frac{\alpha : M\beta 1, \cdots, M\beta m}{\omega}$$

と書く．また，弁明が１つしかなく，しかも弁明と帰結とが同じ論理式であるようなデフォルト規則，すなわち，

$$\frac{\alpha(x) : M\beta(x)}{\beta(x)}$$

の形のデフォルト規則を正規デフォルト規則(normal default rule)という．

Ｄをデフォルト規則の集合，Ｗを閉論理式の集合とするとき，ＤとＷの組$\Delta=(D, W)$をデフォルト理論(default theory)という．Ｄが閉デフォルト規則の集合であればΔを閉デフォルト理論と呼び，Ｄが正規デフォルト規則の集合であればΔを正規デフォルト理論と呼ぶ．

デフォルト規則の集合Ｄに対し，CONS(Ｄ)を次のように定義する．

$$\mathrm{CONS}(D) \equiv \left\{ \omega(x) \;\middle|\; \frac{\alpha(x) : M\beta 1(x), \cdots, M\beta m(x)}{\omega(x)} \in D \right\}$$

CONS(Ｄ)はＤに属するデフォルト規則の帰結の集合である．

閉論理式の集合Ｓと閉論理式ωに対して，ωがＳから導出されるとき$S \vdash \omega$，導出可能でないとき$S \nvdash \omega$と書く．また，

$$Th(S) \equiv \{\omega \mid \omega は閉論理式で，S \vdash \omega\}$$

と定義する．

$\Delta=(D, W)$を閉デフォルト理論とし，$S \subseteq L$を閉論理式の集合とする．このとき，$\Gamma(S)$で次の３つの性質を満たす最小の集合を表す．

(1) $W \subseteq \Gamma(S)$

(2) $Th(\Gamma(S))=\Gamma(S)$

(3) $\dfrac{\alpha : M\beta 1, \cdots, M\beta m}{\omega} \in D$なるデフォルト規則が存在するとき，$\alpha \in \Gamma(S)$かつ$\neg\beta 1, \cdots, \neg\beta m \notin S$ならば，$\omega \in \Gamma(S)$.

閉論理式の集合$E \subseteq L$が$\Gamma(E)=E$を満たすとき，ＥをΔの拡張であるという．

次の定理は，閉デフォルト理論の拡張の特徴をより直観的に与えるものである．

定理１(Reiter[1])　$E \subseteq L$を閉論理式の集合，$\Delta=(D, W)$を閉デフォルト理論とし，閉論理式の集合の列$E0, E1, \cdots$を次のようにとる．

$$E0 = W$$

$$Ei{+}1 = Th(Ei) \cup \left\{ \omega \;\middle|\; \frac{\alpha : M\beta 1, \cdots, M\beta m}{\omega} \in D, Ei \vdash \alpha, E \nvdash \neg\beta 1, \cdots, \neg\beta m \right\} \quad (i \geq 0)$$

とする．このとき，ＥがΔの拡張であるための必要十分条件は$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$である．

正確には，Reiter[1] による定理では，使用可能なデフォルト規則の条件を$\alpha \in Ei, \neg\beta 1, \cdots, \neg\beta m \notin E$として$Ei{+}1\ (i \geq 0)$を定義しているが，$Th(E)=E$，$Th(Ei) \subseteq Ei{+}1$であるので，定理１のように定義しても本質的な差異は生じない．$\alpha \in Ei$，$\neg\beta 1, \cdots, \neg\beta m \notin E$であるかどうかを調べるためには，導出可能かどうかを調べる必要がある．そこで，そのことが直観的にわかるように，定理１の定義を使うことにする．

閉デフォルト理論Δに対し，必ずしも拡張が存在するとは限らない．また，Δ

の拡張が複数存在することもある．拡張が複数存在するということは，その時点で考えられる可能な世界が複数あることを意味する．それらの拡張の中でどの拡張が正しいかを決めることは，拡張を構成することとは別の問題である．どの拡張が正しいか，あるいは正しくないかは，世界に関する新しい事実が与えられるにつれて，次第にわかってくることである．

閉デフォルト理論Δが，言語Ｌの閉論理式全体からなるような拡張を持つとき，Δは矛盾拡張を持つという．Ｗが矛盾集合であるような閉デフォルト理論Δ＝（Ｄ，Ｗ）は，矛盾拡張しか持たない．

系２(Reiter[1]) 閉デフォルト理論Δ＝(Ｄ，Ｗ)が矛盾拡張を持つための必要十分条件はＷが矛盾集合であることである．

系３(Reiter[1]) 閉デフォルト理論Δ＝(Ｄ，Ｗ)が矛盾拡張を持つならば，それはΔの唯一の拡張である．

Ｗが矛盾集合であるときは，矛盾拡張以外の拡張をもたないので，以後特に断わらない限り，Ｗが無矛盾であるようなΔ＝（Ｄ，Ｗ）について議論する．

一般に，デフォルト理論は拡張を持つとは限らないが，閉正規デフォルト理論に関してはこのことが保証されている．

定理４(Reiter[1]) 任意の閉正規デフォルト理論は，少なくとも１つの拡張を持つ．

閉正規デフォルト理論は，デフォルト理論の多くの自然な例を含んでおり，重要なクラスであると考えられている．

３．疑似拡張の定義とその性質

Reiterは，定理１において，各E_iを構成するとき，$E_i \vdash \alpha, E \nvdash \neg\beta_1, \cdots, E \nvdash \neg\beta_m$というチェックを行い，デフォルト規則が使用可能かどうかを調べている．後で矛盾を生じることにならないようなデフォルト規則だけが，この条件を満たす．$E \nvdash \neg\beta_1, \cdots, E \nvdash \neg\beta_m$というチェックを行うことは，拡張Ｅ自体を使って拡張Ｅを構成しているということである．この意味で自己再帰的であるため，定理１によって，与えられたある閉論理式の集合Ｓが拡張であるかどうかを調べることはできるが，拡張をＷから逐次的に構成することはできない．そこで，逐次的に構成することができる閉論理式の集合を定義することにする．この閉論理式の集合を疑似拡張と呼ぶ．

定義　閉デフォルト理論Δ＝(Ｄ，Ｗ)に対し，$F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$を疑似拡張という．

ただし，$F_i (i \geq 0)$ は，次のように構成される閉論理式の集合である．

$$F_0 \equiv W$$

$$F_{i+1} \equiv Th(F_i) \cup CONS(D_{F_i}) \quad (i \geq 0)$$

ここで，D_{F_i} は，

$$D_{F_i} \subseteq \left\{ \delta = \frac{\alpha : M\beta_1, \cdots, M\beta_m}{\omega} \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta \in D, \\ \omega \notin CONS(\bigcup_{k=1}^{i-1} D_{F_k}) \\ F_i \vdash \alpha, \\ F_i \nvdash \neg\beta_1, \cdots, \\ \qquad F_i \nvdash \neg\beta_m \end{array} \right\}$$

で，右辺が空集合でないならば，$D_{F_i} \neq \phi$であるようなデフォルト規則の集合とする．

デフォルト規則の適用条件を$F_i \nvdash \neg\beta_1, \cdots, F_i \nvdash \neg\beta_m$とした点が，Reiterの拡張と異なる．これによって，疑似拡張は，逐次的に構成することが可能となっ

た．また，Ｆi+1 を構成するときに，その時点で，条件を満たすデフォルト規則すべてを使わなければならないのではなく，その適当な部分集合でよい．この疑似拡張はReiterの拡張と次のような関係にある．

定理５　閉デフォルト理論Δのすべての拡張の集合を$\mathbb{E}$とし，すべての疑似拡張の集合を$\mathbb{F}$とする．そうすると$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$である．

（証明）任意の拡張$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$において，$i \geq 1$の各$E_i$を作るのに使ったデフォルト規則の集合を D_iとすると，各E_iは$E_i = Th(E_{i-1}) \cup CONS(D_i)$と書ける．$\delta = \dfrac{\alpha : M\beta 1, \cdots, M\beta m}{\omega} \in D_i$に対して，$E_i \vdash \alpha$，$E \nvdash \neg\beta 1, \cdots, E \nvdash \neg\beta m$である．よって，$E_i \subseteq E$ より，$E_i \nvdash \neg\beta 1, \cdots, E_i \nvdash \neg\beta m$である．そこで，

$D'_i \equiv \{\delta \mid \delta \in D_i,\ CONS(\delta) \notin F_{i-1}\}$

ととって，次のように閉論理式の集合$F_1, F_2, \cdots$を構成する．

$F_0 = W$

$F_1 = Th(F_0) \cup CONS(D'_1)$

………

$F_i = Th(F_{i-1}) \cup CONS(D'_i)$

………

そうすると，$F_i = E_i (i \geq 0)$なので，

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$$

である．

ここで，D'_iは疑似拡張の定義におけるD_{F_i}の条件を満たす．

そこで，$F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ととると，Ｆは疑似拡張である．

したがって，

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i = F \in \mathbb{F}$$

である．故に，$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$となる．□

定理６　Δが閉正規デフォルト理論のとき，Ｆが疑似拡張であって拡張でないならば，矛盾集合である．

（証明）$F \in \mathbb{F}$かつ$F \notin \mathbb{E}$となる閉論理式の集合Ｆが存在すると仮定する．$F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$において各$F_i$を作るのに使ったデフォルト規則を$D_{F_i}$とおく．仮定より，あるiとデフォルト規則$\delta = \dfrac{\alpha : M\beta}{\beta}$が存在して，$\delta \in D_{F_i}$，$F \vdash \alpha$，$F_i \nvdash \neg\beta$，$F \vdash \neg\beta$である．

ところが，$\delta \in D$，$F \vdash \alpha$，$F_i \nvdash \neg\beta$より，$\beta \in F_{i+1} \subseteq F$である．したがって，$F \vdash \neg\beta$かつ$F \vdash \beta$となり，Ｆは矛盾集合である．□

定理６においてΔが正規デフォルト理論でないならば，Δの疑似拡張で，Δの拡張でも矛盾集合でもないものが存在する．そのような例を次に示す．

例

$$D = \left\{ \frac{: MA}{B},\ \frac{: M\neg B}{C},\ \frac{B \wedge C : MD}{A} \right\}$$

$W = \phi$

であるようなデフォルト理論Δ＝（D，W）を考える．

このとき，Δの疑似拡張$F = Th(\{A, B, C\})$は，矛盾集合ではないが，Δ

の拡張にもなっていない.

以上により，デフォルト理論から逐次的に構成できる疑似拡張全体の集合は拡張を含むこと，閉正規デフォルト理論に関しては，疑似拡張は矛盾集合でなければ拡張であることがわかる.

Δ＝（D，W）においてWが矛盾集合である場合について触れておく. このとき，系2，3よりΔは矛盾拡張を持ち，それは唯一の拡張である. このΔの疑似拡張は，定義より明らかに矛盾集合であり，唯一の疑似拡張である. したがって，拡張に一致する.

4．モデル推論の枠組み

ここで，拡張の修正について考えることにする. デフォルト推論は，非単調性，すなわち，事実の増加が知識の増加を意味しないという性質を持つ. つまり，拡張は確定的な知識ではなく，新しい事実が発見されると，拡張の構成に使用したある推論規則が使えなくなり，拡張の修正が必要になる可能性がある. Reiterは，拡張のある部分集合Bを信念として，Bを修正することを考えている. 本稿では，拡張全体を信念と捉え，デフォルト理論により表現しようとする世界に，より近い拡張を求めることが，信念修正であるとして議論する. 以後，拡張の修正と信念修正という用語は，同じ意味で使う.

それまでの拡張で説明できない新しい事実が得られたときには，拡張を修正するという過程はモデル推論に近い. そこで，拡張の修正をモデル推論の枠組みで捉えることにする. まず，Shapiro のモデル推論 [3,4]について簡単に述べる.

1階言語Lは，節形式の文からなるとする. □で空文を表す. 空文はLの任意のモデルにおいて偽である. 1つのアトムだけからなる文を単文と呼び，変数を含まない単文をグランド単文と呼ぶ.

1階言語Lの2つの部分集合Lo，Lhを考え，それぞれ観測言語，仮説言語と呼ぶ. □∈Lo⊆Lh⊆Lであり，LoとLhは決定可能であると仮定する. Lo，Lhの文をそれぞれ観測文，仮説と呼ぶ. モデル推論問題において対象とする領域はLのあるモデルMである. また，神託の存在を仮定し，それによって，観測文αがMにおいて真(true)であるか偽(false)であるかを与えるとする. Lの要素αがモデルMにおいて真であるときに，$M \models \alpha$と書き，Lの部分集合Tのすべての要素がMにおいて真であるときに，$M \models T$と書く. $\alpha \in Lo$ と$V \in \{true, false\}$の対＜α，V＞をモデルMに関する事実と呼ぶ. モデルMにおいて真であるような観測文全体の集合をL_o^M で表す. Lh の部分集合TがMの Lo完全公理化であるとは，$M \models T$かつ$T \vdash L_o^M$ となることであると定義する. これらの用語を使うとモデル推論問題は次のように定義される.

モデル推論問題とは，1階言語LとLの2つの部分集合，観測言語Loと仮説言語Lhが与えられ，さらに，Lの未知モデルMに対する神託が与えられているとするときに，Mの有限な Lo完全公理化Tを見つけることである.

モデル推論問題を解くアルゴリズムをモデル推論アルゴリズムという. モデル推論アルゴリズムは，入力→計算→出力という過程を無限に繰り返すアルゴリズムである. 入力は，未知モデルに関する事実で，出力は， Lhの文の有限集合で，これを推測と呼ぶ. 任意の$\alpha \in Lo$ に対して，ある$i \geq 1$ が存在して，$Fi=$＜α，V＞となるようなMに関する事実の列F1，F2，…をモデルMの枚挙という.

モデル推論アルゴリズムがある推測を出力し，それ以後決して異なる推論を出力しなければ，このアルゴリズムはモデルMの枚挙に対して極限において収束するという. Mの任意の枚挙上でモデル推論アルゴリズムがLo完全公理化となるよ

うな推測に収束するとき，このアルゴリズムはMを極限において同定するという．

モデル推論問題が解けるためには，L_oとL_hがある許容条件を満していなければならない．この許容条件は，L_o完全公理化にしようとしている理論が偽であるならば，そのような任意の理論を反駁するのに十分な情報を L_oが持っていなければならないということを意味する．Lを1階言語，L_h＝L，L_o＝{Lのグランド単文}とするとL_oとL_h はこの許容条件を満たすことがわかっている．

Shapiro は枚挙型モデル推論アルゴリズムを示し，このアルゴリズムが極限において同定するモデルのクラスが，ある計算量のクラスになることを示した．

枚挙型モデル推論アルゴリズムは，次のようなアイデアに基づいている．

事実＜α_i，V_i＞を入力とし，L_hの文の有限集合を推測として出力する．推測が既知の事実と合致すると考える限りは，その推測を固守し，合致しないことがわかったら，既知の事実と合致すると考えうる次の推測を枚挙によって捜す．

しかし，現在の推測が既知の事実と合致するか否かは一般に決定不可能である．そこで，この判断に要する時間にある上限を設けることにより上のアイデアを実現している．枚挙型モデル推論アルゴリズムは，モデルMがh従順(h-easy)であれば，Mを極限において推論できる．

Shapiro は，さらに，ある条件を満たすようなモデル推論アルゴリズムに対しては，そのアルゴリズムが推論するすべてのモデルがh従順になるようなhが作れることを示した．枚挙型モデル推論アルゴリズムは，そのような条件を満たしている．したがって，このモデル推論アルゴリズムは，ある帰納的関数h に対し，h従順なモデルの全てを推論し，また，h従順なモデルだけを推論する．

5．モデル推論を利用した拡張の修正

デフォルト推論が表現しようとしている世界を言語Lの未知モデルMとみなすことにより，Shapiro のモデル推論を使って拡張の修正の問題を定式化する．モデル推論の枠組みに従うと，ここで扱う問題は次のように書ける．

拡張修正の問題とは，1階言語Lと観測言語 L_o＝{Lのグランド単文}，仮説言語L_h＝L が与えられ，さらに，閉デフォルト理論Δ＝（D，W）を真にするようなLのh従順な未知モデルMに対する神託が与えられているとするときに，Mの有限なL_o 完全公理化を見つけることである．

ここで，閉デフォルト理論Δ＝（D，W）を真にするようなモデルMとは，次の3つの条件を満たすものとする．

(1) $M \models W$

(2) $\dfrac{\alpha : M\beta_1, \cdots, M\beta_m}{\omega} \in D$に対して，$M \models \alpha$かつ$M \not\models \neg\beta_1, \cdots, M \not\models \neg\beta_m$ならば$M \models \omega$である．

(3) グランド単文でないuに対して，D'を$W \cup CONS(D')$が無矛盾であるようなDの部分集合であるとするとき，$W \cup CONS(D') \not\models u$ならば$M \not\models u$ である．

これは，Shapiro のモデル推論における未知モデルMに条件をつけたものであると考えられる．

デフォルト理論においてDとWが有限集合であるものを有限閉デフォルト理論と呼ぶ．有限閉デフォルト理論に関して次の定理が成立する．

定理7　有限閉デフォルト理論Δ＝(D，W)の任意の拡張Eに対し，EのL_o有限完全公理化が存在する．

（証明）Lの有限部分集合Tが存在して，$E \models T$かつ$T \vdash L_0^E$ となることを示せばよい．

任意の拡張Eは，定理1より$E=\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$と書ける．
各$E_i (i \geqq 1)$を作るのに使ったデフォルト規則の集合をそれぞれ$D_i (i \geqq 1)$とすると，$D_i \subseteq D$であり，各E_iはD_iを用いて，

$$E_0 = W$$

$$E_i = Th(E_{i-1}) \cup \mathrm{CONS}(D_i) \quad (i \geqq 1)$$

と表せる．
Dは有限集合なので，あるNが存在して任意の$n \geqq N$に対して，$D_n = D_{n-1}$となるので，

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_{N-1} \subseteq E_N = E_{N+1} = E_{N+2} = \cdots$$

となる．よって，

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = E_N$$

である．また，

$$\begin{aligned}
E_N &= Th(E_{N-1}) \\
&= Th(Th(E_{N-2}) \cup \mathrm{CONS}(D_{N-1})) \\
&= Th(Th(Th(E_{N-3}) \cup \mathrm{CONS}(D_{N-2})) \\
&\qquad\qquad \cup \mathrm{CONS}(D_{N-1})) \\
&= Th(Th(E_{N-3}) \cup \mathrm{CONS}(D_{N-2}) \\
&\qquad\qquad \cup \mathrm{CONS}(D_{N-1})) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&= Th(Th(Th(E_0) \cup \mathrm{CONS}(D_1)) \\
&\qquad\qquad \cup \bigcup_{i=2}^{N-1} \mathrm{CONS}(D_i)) \\
&= Th(Th(W) \cup \bigcup_{i=1}^{N-1} \mathrm{CONS}(D_i)) \\
&= Th(W \cup \bigcup_{i=1}^{N-1} \mathrm{CONS}(D_i))
\end{aligned}$$

である．また，W，Dは有限集合なので$W \cup \bigcup_{i=1}^{N-1} \mathrm{CONS}(D_i)$も有限集合である．

そこで，

$$T \equiv W \cup \bigcup_{i=1}^{N-1} \mathrm{CONS}(D_i)$$

ととれば，明らかに，$E \vDash T$かつ$T \vdash L_0^E$ である．
故に，拡張Eの有限なL_0完全公理化が存在する．□

定理8　Mは有限閉デフォルト理論$\Delta = (D, W)$を真にするLのh従順な未知モデルとする．このとき，Shapiro の枚挙型モデル推論アルゴリズムがMを極限において同定し，推測Tを出力するならば，$Th(T)$はある$\Delta' = (D, W \cup W')$の拡張である．ただし，W'は事実のある集合とする．
（証明）

$$W' \equiv \{f_i \mid 1 \leqq i \leqq k\}$$

$$\qquad \cup \{u \mid u\text{はグランド単文で}T \vdash u\text{かつ}W \cup \mathrm{CONS}(D') \nvdash u\}\ \text{ととる．}$$

ととる．ただし，f_i は，アルゴリズムに入力された事実が$\langle \alpha_i, V_i \rangle$であるときに，

$$f_i = \begin{cases} \alpha_i & (V_i = \mathrm{true}) \\ \neg \alpha_i & (V_i = \mathrm{false}) \end{cases}$$

と定義する．
$\Delta' = (D, W \cup W')$と$Th(T)$に関して$\Gamma(Th(T))$を考える．

Ｔｈ(Ｔ)がΔ'の拡張であることを示すには，Ｔｈ(Ｔ)＝Γ(Ｔｈ(Ｔ))を示せばよい．

まず，Γ(Ｔｈ(Ｔ))⊆Ｔｈ(Ｔ)を示す．

Ｍ⊨Ｗと，Ｗ'の決め方からＴ⊢Ｗ∪Ｗ'なので，

Ｗ∪Ｗ'⊆Ｔｈ(Ｔ)

Ｔｈ(Ｔｈ(Ｔ))＝Ｔｈ(Ｔ)

である．

ＭがΔを真にするという条件から，あるデフォルト規則δが存在して，

$\delta = \dfrac{\alpha : M\beta 1, \cdots, M\beta m}{\omega} \in D$，$M \vDash \alpha$かつ$M \nvDash \neg\beta 1, \cdots, M \nvDash \beta m$ならば$M \vDash \omega$である．すなわち，$\delta \in D$に対し，Ｔｈ(Ｔ)$\vdash \alpha$かつＴｈ(Ｔ)$\nvdash \neg\beta 1, \cdots,$Ｔｈ(Ｔ)$\nvdash \neg\beta m$ならば$\omega \in$Ｔｈ(Ｔ)である．

以上よりＴｈ(Ｔ)はΓ(Ｓ)の３つの性質を満たす．よって，Γ(Ｓ)の最小性より，

Γ(Ｔｈ(Ｔ))⊆Ｔｈ(Ｔ)

である．

次に，Ｔｈ(Ｔ)⊆Γ(Ｔｈ(Ｔ))を示す．

$v \in$Ｔｈ(Ｔ)と仮定する．

(1) $v \in W \cup W'$のとき，Ｗ∪Ｗ'⊆Γ(Ｔｈ(Ｔ))より $v \in$Γ(Ｔｈ(Ｔ))である．

(2) $\delta = \dfrac{\alpha : M\beta 1, \cdots, M\beta m}{v} \in D$が存在して，$M \vDash \alpha$，$M \nvDash \neg\beta 1, \cdots, M \nvDash \neg\beta m$であるとき，

Ｔｈ(Ｔ)$\vdash \alpha$

Ｔｈ(Ｔ)$\nvdash \neg\beta 1, \cdots,$Ｔｈ(Ｔ)$\nvdash \neg\beta m$

Ｔｈ(Ｔ)⊆Γ(Ｔｈ(Ｔ))

であるから，$\dfrac{\alpha : M\beta 1, \cdots, M\beta m}{v} \in D$が存在して，

Γ(Ｔｈ(Ｔ))$\vdash \alpha$

Ｔｈ(Ｔ)$\nvdash \neg\beta 1, \cdots,$Ｔｈ(Ｔ)$\nvdash \neg\beta m$

である．したがって，$v \in$Γ(Ｔｈ(Ｔ))である．

(3) $M \vDash \alpha$，$M \nvDash \neg\beta 1, \cdots, M \nvDash \neg\beta m$であるようなデフォルト規則

$$\delta = \frac{\alpha : M\beta 1, \cdots, M\beta m}{\omega}$$

全体の集合をＤ''とする．Ｗ∪Ｗ'∪CONS(Ｄ'')$\vdash v$のとき，

$v \in$Ｔｈ(Ｗ∪Ｗ'∪CONS(Ｄ''))

⊆Ｔｈ(Γ(Ｔｈ(Ｔ)))

＝Γ(Ｔｈ(Ｔ))

である．

(4) $v \in$Ｔｈ(Ｔ)が(1)－(3)以外のとき，vがグランド単文でないならば，ＭがΔを真にすることから$M \nvDash v$である．よって，Ｔが偽であることを示す証拠をＬｏが持つので矛盾する．

v がグランド単文ならば$v \in$Ｗ'⊆Γ(Ｔｈ(Ｔ))である．□

定理７から，有限閉デフォルト理論の任意の拡張に対し，その Ｌｏ完全公理化が存在することがいえる．よって，Ｌｈ の全ての部分集合の枚挙をＴ１，Ｔ２，…とすると，拡張は，Ｔｈ(Ｔ１)，Ｔｈ(Ｔ２)，…の中に必ず現れる．また，有限閉デフォルト理論Δを真にするという条件のついたｈ従順な未知モデルＭを対象にモデル推論を行ったとき，枚挙型モデル推論アルゴリズムが未知モデルＭを同定した

ならば，Mはある閉デフォルト理論Δ' の拡張になることが，定理8からいえる．定理8のΔ'におけるDは有限集合であるので，Δ'は高々有限個の拡張しか持たない．したがって，ある有限閉デフォルト理論の拡張が複数存在し，その中のどれかが未知モデルMであるときには，拡張全体の集合を枚挙型モデル推論アルゴリズムにおける推測の探索空間とすれば，拡張の中で，未知モデルMが求まることになる．また，有限デフォルト理論の疑似拡張が枚挙できるときには，疑似拡張を推測として，モデル推論を行えば，モデル推論の過程で，疑似拡張であって拡張でないものや，拡張ではあるが，新しくわかった事実に反するようなものは，排除され，未知モデルMであるような拡張が求まることになる．

6．関連した研究

Reiterのデフォルト推論においては，拡張が逐次的に構成できないことや閉正規デフォルト理論以外に対しては拡張の存在さえ保証されないなどの問題点がある．そこで，本稿とは独立に，それらを可能にするような定式化が研究されている．Reiter&Criscuolo[5]は，準正規デフォルト規則(seminormal default rule)と呼ばれる特殊な形のデフォルト規則を導入した．準正規デフォルト理論は，自然な例であるのに正規デフォルト理論ではうまく表現できない知識を表現することを意図しているが，この準正規デフォルト理論に対してさえ，拡張の存在は保証されない．

Łukaszewicz[6] は，命題論理の言語Lを対象とするデフォルト推論において，拡張の定義を変えることにより，拡張の存在を保証している．Łukaszewiczの拡張は，2つの論理式の集合S，Tに対して，Sは弁明の集合Tに関してデフォルト理論Δの拡張であるという形で定義される．

村上ほか[7] は，Reiterの拡張の定義をある意味で一般化した準拡張世界と呼ぶ知識の集合を構成し，準拡張世界の存在を保証している．

Łukaszewiczの拡張も準拡張世界も，任意のデフォルト理論に対して，その存在が保証されてはいるが，Reiterの拡張と同じく，Wから逐次的に構成することはできない．村上ほか[8] は，本稿とは独立に，この点を扱っている．[8] では，閉正規デフォルト理論に対して，逐次的に構成することができるような知識の集合を定義し，非再帰的拡張世界と呼んでいる．この非再帰的拡張世界は，閉正規デフォルト理論に対して一意に決まる．そして，閉正規デフォルト理論Δ＝（D, W）が矛盾拡張をもつとき，すなわち，Wが矛盾集合であるときには，Δの非再帰的拡張世界は矛盾集合となり，Δの拡張と一致する．しかし，拡張の場合と異なり，Δの非再帰的拡張世界が矛盾集合であるときに，Wが矛盾集合であるとは限らない．非再帰的拡張世界が矛盾集合でも，Wが無矛盾である場合がある．それは，Δが複数の拡張を持つ場合である．実際，拡張が存在するにも拘らず，それが非再帰的拡張として求まらないような例が示されている．

言い換えると，Δが複数の拡張を持つ場合には，非再帰的拡張世界は矛盾集合となるか，拡張の中の1つになるかのどちらかである．Δの拡張が1つしかない場合には，非再帰的拡張世界は，Reiterの拡張に一致するというよい結果が得られている．

これに対して，本稿で定義した疑似拡張は，拡張ではないような知識の集合になる場合もあるが，少なくとも拡張はすべて疑似拡張である．拡張とは本来，可能な世界の候補であるから，拡張全体の集合を求めるようなアプローチが必要であると思う．

7. おわりに

本稿では，Reiterのデフォルト推論における拡張の構成に関する問題と拡張の修正に関する問題をとりあげて議論した．

拡張の構成に関しては，Reiterの定義では，逐次的に構成することができないという問題点があった．そこで，拡張を構成する際に用いるデフォルト規則の条件を緩めて，逐次的に構成できる疑似拡張を定義した．この定義は定義の中に自分自身が使われていないという意味で自然である．疑似拡張の中には拡張でないものもあるが，少なくとも拡張はすべて疑似拡張である．また，Wが無矛盾な閉正規デフォルト理論においては，疑似拡張は，矛盾集合でなければ拡張であるという結果が得られた．任意の拡張は疑似拡張であるということは，拡張だけを逐次的な方法で求めることはできないが，その候補として，少し大きな集合を与えるという意味で重要である．

さらに，拡張の修正はモデル推論によくなじむことに着目し，拡張の修正をモデル推論の枠組みで表現した．拡張の Lo有限公理化は，推測の枚挙の中に必ず現れ，また，有限閉デフォルト理論Δを真にするという条件のついたh従順な未知モデルMをモデル推論すると，枚挙型モデル推論アルゴリズムが未知モデルMを同定するならば，Mはある閉デフォルト理論Δ’の拡張になるという結果が得られた．よって，有限閉デフォルト理論のすべての疑似拡張が枚挙できるならば，疑似拡張を推測とすればよいことになる．また，ある有限閉デフォルト理論の拡張が複数存在し，その中のどれかが未知モデルMであるときには，拡張全体の集合を枚挙型モデル推論アルゴリズムにおける推測の探索空間とすれば，拡張の中で，その未知モデルMであるものが求まることになる．

さて，疑似拡張は，逐次的方法で構成できるが，実は，計算可能ではない．疑似拡張の定義におけるデフォルト規則の適用条件，$E_i \nvdash \neg\beta_1, \cdots, E_i \nvdash \neg\beta_m$ は，一般には，半決定可能(semi-decidable)でさえない．これは，[1]や[8]では触れられていないが，Reiterの拡張や，非再帰的拡張世界にも共通する問題点である．その解決には，$\nvdash$ の判定に，例えばh従順性の概念等を導入して計算可能にする必要がある．これは今後の課題である．

参考文献

[1] Reiter, R.: A Logic for Default Reasoning, Artificial Intelligence, vol.13, pp.41-72 (1980)

[2] 新村司：非単調論理における無矛盾性に関する研究，九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻修士論文(1986)

[3] Shapiro, E.Y.: Inductive Inference of Theories From Facts, TR-192, Yale Univ.(1981)
(有川節夫訳：知識の帰納的推論，共立出版(1986))

[4] 石坂裕毅：汎化を用いたモデル推論，九州大学大学院総合理工学研究科情報システム学専攻修士論文 (1986)

[5] Reiter,R., Criscuolo,G.: On Interacting Defaults, Proc. of the 8th IJCAI, pp.270-276(1983)

[6] Łukaszewicz,W.: Considerations on Default Logic, Proc. AAAI Nonmonotonic Reasoning Workshop, pp.165-193(1984)

[7] 村上研二，相原恒博，四反田秀樹：デフォルト推論における準拡張世界とその性質，情報処理学会論文誌，vol.28, no.12, pp1280-1287, (1987)

[8] 村上研二，相原恒博，四反田秀樹：デフォルト推論における非再帰的拡張世界とその性質，人工知能学会誌（近刊）